Basic Concepts of Elementary Mathematics
Schaaf, William L.

Ponto de vista axiomático

Verdades matemáticas independem de dados empíricos.
Verdades evidentes em si: subjetivas, não existem.
Limite = mente humana, natureza da lógica.
Inferência indutiva: vários experimentos não dão absoluta certeza do próximo.
Inferência dedutiva: do geral p/ o particular ou do geral p/ o geral.
Hipótese e raciocínio = necessidade.
Verdadeiro = aceito.
Proposição: V ou F.
Suposição = axioma = postulado = arbitrariamente designado V.
Sistema consistente: proposição nunca V e F ao mesmo tempo.
Ciência matemática:

- sistema lógico abstrato, dedutivo;
- algumas palavras não definidas, caracterizadas pelos postulados;
- outras palavras definidas;
- postulados;
- teoremas, seguindo leis da lógica, necessidades conseqüentes dos postulados.

O verdadeiro pode conviver com o falso. Ex.: Gosto ou não gosto de matemática?

Conjuntos

Indefinições: conjunto (coleção de coisas discretas), elemento, pertinência.
Diagramas de Venn
$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$
Identical: $A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A)$
Equivalent: $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \forall x \in A, \exists!\ x' \in B$
$P \cup Q = \{x|\ x \in P \vee x \in Q\}$
$P \cap Q = \{x|\ x \in P \wedge x \in Q\}$
$P' = P$ *barrado* $= \{x|\ x \in U \wedge x \notin P\} \Rightarrow P \cup P' = U$
$A - B = \{x|\ x \in A \wedge x \notin B\}$

Relações

(a,b) é par ordenado
$> = \{(a,b)|\ a - k = b;\ a,b,k > 0\}$
$a > b \Leftrightarrow (a,b) \in >$
$(a,b) \in R \Leftrightarrow aRb$
Reflexividade: quando xRx
Simetria: $xRy \Leftrightarrow yRx$
Transitividade: $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$
Assimetria: $xRy \Leftrightarrow \sim(yRx)$, ou seja, $xRy \Leftrightarrow yR^{-1}x$

Mapping

A into P) rule: $\forall x \in A, \exists!\ y \in P.\ \alpha x = y$
A onto P) $\forall y \in P, \exists x \in A \mid \alpha x = y$
1:1) $\forall y \in P, \exists!\ x \in A \mid \alpha x = y$

Operações: $S \times S$ into S. Ex.: $2 + 3 = 5$; $\alpha(2,3) = 5$
Sistema matemático: S junto com operações em S.

Natureza da Matemática

Interesses: conteúdo dos teoremas, modelo pelo qual os teoremas são interrelacionados, modo como são derivados das suposições, generalizações.
Uma def. de geometria: figuras imutáveis sob a ação de transformações; álgebra: símbolos e operações.
Dar significado aos termos abstratos de acordo com a vontade.
A Matemática é criada com objetivos bem definidos, mas, por meio do abandono desses objetivos e da adoção das estruturas axiomáticas, este limite intencional é ultrapassado, podendo os termos abstratos serem interpretados de novas formas.
Se a abstração é associada a objetos físicos, então está criado um modelo matemático dessa interpretação física.
Sistema abstrato isolado = matemática pura; interpretações concretas = matemática aplicada.

Lógica

Operações:

p	q	$\sim q$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \to q$	$q \to p$	$p \leftrightarrow q$	$\sim p \to \sim q$	$\sim q \to \sim p$
0	0	1	0	0	A	A	1	1	1
0	1	0	1	0	B	0	0	0	B
1	0	1	1	0	0	B	0	B	0
1	1	0	1	1	1	1	1	A	A

Def. de equivalência: $(p \leftrightarrow q)$ se e só se $[(p \to q) \wedge (q \to p)]$
Logo, $A = 1$.
Def. sobre as implicações: $\sim [(p \to q) \leftrightarrow (q \to p)]$
Logo, $B = 1$.
Modus ponens, lei fundamental da inferência dedutiva:
$[(p \to q) \wedge p] \to q$
Chain rule: $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$
Círculos de Euler: $p \to q$ então $p \subset q$
Defs.:

Proposição	$p \to q$	
Recíproca (converse)	$q \to p$	
Inversa	$\sim p \to \sim q$	Equivale à recíproca
Contrapositiva	$\sim q \to \sim p$	Equivale à proposição

Prova indireta:
eliminar todas as possibilidades exceto uma
OU mostrar que a hipótese e a negação da tese são contraditórias

"não sabemos sobre oq falamos, nem se oq falamos está certo", mas concordo que SE o verdadeiro contradiz o falso e SE considero verdadeiras algumas hipóteses, isso me força a acreditar em algumas teses...

Geometria Euclidiana

Espaço, ponto, reta, plano, intuição
Interseção e interceptar
Princípios:

- por um ponto passam infinitas retas;
- por dois pontos passa uma única reta;
- se uma reta determina dois pontos num plano, ela pertence a esse plano;

- por uma reta passam infinitos planos;
- por três pontos não colineares passa um único plano;
- duas retas concorrentes determinam um único plano;
- duas retas sem ponto comum num mesmo plano são chamadas paralelas;
- duas retas paralelas determinam um único plano;
- uma reta e um ponto que não pertence a ela determinam um único plano;
- a interseção entre dois planos determina uma reta;
- duas retas sem ponto comum que não pertencem a um plano comum são chamadas reversas.

Segmentos: PR *barrado* = PQ *barrado* ∪ QR *barrado*

Separações: A,B ∉ m ↔ A,B estão do mesmo lado de m. Assim são delimitados semi-retas, semi-planos e semi-espaços.

Ângulos

Paralelas: simétrica, transitiva

Curva

contínua; fechada/aberta; simples: sem cruzamento; convexa

Network

traçar cada segmento apenas uma vez, sem tirar o lápis do papel.
Vértice: par/ímpar; segmentos = arcs; leis de Euler (sem prova):
1) número par de vértices ímpares
2) se todos os vértices são pares,
  a) então sempre pode ser traçada continuamente
  b) senão o número de jornadas necessárias é metade de v_i

Simplexes

0 – ponto
1 – segmento – comprimento
2 – triângulo – área
3 – tetraedro – volume

Poliedros: 1 dimensão ⊃ 1-simplexes; 2 ou 3 dimensões ⊃ 2-simplexes

Poligonal path

Polígono: nro. de segmentos = nro. de vértices

Lei de Euler (sem prova): F + V = E + 2, para todo sólido convexo limitado por uma superfície simples (polígono)

Polígono regular: segmentos e ângulos iguais

Poliedro regular: tem faces iguais a polígonos regulares congruentes.
Apenas 5 são possíveis (sem prova):
faces/lados, 4/3, 6/4, 8/3, 12/5, 20/3.

Pré-grécia antiga: empírica, tentativa e erro. A partir de 600 a.C., dedutiva.

Congruência, medidas, semelhança, Pitágoras

Interpretação do espaço, medidas, deveria ser Física, mas SE supusermos um espaço constituído de pontos euclidianos...

Sistemas de numeração.

Dígitos, posições, bases, abstração de número, contagem.

Números naturais e inteiros.

Comparação:

$a = a$

$a = b \Leftrightarrow b = a$

$(a = b) \wedge (b = c) \Rightarrow a = c$

$a > b \Leftrightarrow \exists x > 0 \mid a = b + x$

$a < b \Leftrightarrow \exists x > 0 \mid a + x = b$

Definições:

Counting numbers: hum, dois, três...

Números naturais: modelo criado a partir da representação simbólica dos counting numbers

0 não é natural, apenas um numeral.

Inteiros como pares ordenados:

$\forall x \in Z, \exists a,b \in N^* \mid x = a - b \Rightarrow Z = \{(a,b) \mid a,b \in N^*\}$

Exponenciação***

Divisibilidade por 2 e 5:

$N = 10a + k,\ k < 10 \Rightarrow N \in M(d) \Leftrightarrow k \in M(d)$

Divisibilidade por 3 e 9:

$$\begin{aligned} N &= 1000a + 100b + 10c + d \\ &= (999 + 1)a + (99 + 1)b + (9 + 1)c + d \\ &= (999a + 99b + 9c) + (a + b + c + d) \\ &\Rightarrow N \in M(d) \Leftrightarrow (a + b + c + d) \in M(3) \end{aligned}$$

Divisibilidade por 4:

$N = 100a + k,\ k < 100 \Rightarrow N \in M(4) \Leftrightarrow k \in M(4)$

Divisibilidade por 8:

$N = 1000a + k,\ k < 1000 \Rightarrow N \in M(8) \Leftrightarrow k \in M(8)$

Divisibilidade por 11:

$$\begin{aligned} N &= 10000a + 1000b + 100c + 10d + e \\ &= (9999 + 1)a + (1001 - 1)b + (99 + 1)c + (11 - 1)d + e \\ &= (9999a + 1001b + 99c + 11d) + (a + c + e) - (b + d) \\ &\Rightarrow N \in M(11) \Leftrightarrow (a + c + e) - (b + d) \in M(11) \end{aligned}$$

Testar se x é primo: checar se é divisível por algum primo $\leq$ *sqrt*(x)

Highest Common Factor, Least Common Multiple.

Príncipio de Arquimedes: $\forall a,b \in Z^*, \exists k \in Z \mid kb \leq a \leq (kb + |b|)$

Corolário: o teorema da divisão de Euclides

Congruência: $a \equiv b \pmod m$ “a é congruente a b, módulo m” quando:

$(r \geq 0) \wedge (a = q_1 m + r) \wedge (b = q_2 m + r) \Leftrightarrow a - b = km$

Propriedades: reflexiva, simétrica, transitiva

Aritmética modular, módulo m: $t + mk = t$

Números Reais

Números racionais:

Perda de previsão do próximo elemento.

Everywhere dense: $\forall a,b \in Q^*,\ a < b,\ \exists x \in Q \mid a < x < b$

$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow ad = bc$

$(a,b) + (c,d) = (ad + bc, bd)$

$(a,b) \cdot (c,d) = (ac, bd)$

$(a,b) / (c,d) = (p,q) \Leftrightarrow (a,b) = (c,d) \cdot (p,q) \Leftrightarrow adq = bcp$

$\Leftrightarrow (p,q) = (ad, bc)$

Number field: soma, subtração, multiplicação, divisão e elementos neutros definidos em um conjunto.

Involution (exponenciação), evolution.

Prova do lema: m^2 é par $\Rightarrow$ m é par.

Suponha $m = 2k + 1 \Rightarrow m^2 = 4k^2 + 4k + 1$, contradizendo $m^2 = 2c$

Existência de números irracionais:

- Suponha sqrt(2) = (a/b), (a,b) primos entre si

  $2 = (a/b)^2 \Leftrightarrow 2b^2 = a^2 \Leftrightarrow a = 2k$

  $2b^2 = 4k^2 \Leftrightarrow b^2 = 2k^2$, contradizendo "primos entre si"

- Prova do teorema: $\forall x \in Q, \exists y \in Q \mid y > x, x^2 < 2$
  Suponha que exista um máximo q
  Construção: $M = (2 + q)/2, q < M < 2$
- Correspondência com uma reta: diagonal de um quadrado de lado hum. Reta dos números reais.

Representação decimal: dízima periódica é da forma a/b
Denumerabilidade:

- Um conjunto é denumerável se pode ser colocado em correspondência 1:1 com os números naturais. A multiplicidade de elementos no conjunto, ou seja, seu número cardinal, é indicada pelo último ou maior número natural, se este existir.
- Um conjunto denumerável é infinito se e somente se o seu todo pode ser colocado em correspondência 1:1 com uma de suas partes. Ex.: números pares.
- Se dois conjuntos infinitos podem ser colocados em correspondência biunívoca, eles têm o mesmo *número transfinito* de elementos.
- Z é denumerável, contavelmente infinito: {0, 1, −1, 2, −2, ..., +n, −n, ...}
- Q^*_+ é denumerável, pois pode ser colocado em correspondência com os naturais. Ex. de método sistemático: {1/1, 1/2, 2/1, 3/1, 2/2, 1/3...}
- O número cardinal transfinito de conjuntos denumeravelmente infinitos é chamado de <u>aleph null</u> e representado por $\aleph_0$

Tentativa de denumerar os números reais: ordem crescente, em representação decimal. Entre dois números quaisquer, pode-se construir outra dízima, logo:

- R não é denumerável.
- Os irracionais são de uma maior ordem de infinidade que os racionais. Seu número cardinal transfinito, chamado de **C**, é conhecido como o *cardinal do contínuo* e é infinitamente maior que $\aleph_0$.

Prova dos teoremas:

- $\forall a,b \in R, a < b, \exists k \in Q \mid a < k < b$
  Construção: $m \in Z \mid m < nb \leq m + 1$
  Postulado de Arquimedes: $\exists n \in N^* \mid n(b - a) > 1$
  Implicações: ***
- $\forall a,b \in R, a < b, \exists k \in (R - Q) \mid a < k < b$
  Construção: $p \in N^*$ ***

Números Complexos

Defs.: $i^2 = -1$; $(m,n) = m + ni$
Módulo e amplitude, vetores, operações, propriedades ***

Equações, Desigualdades e Fórmulas

Def.: Um símbolo em uma expressão matemática é uma variável se e somente se pode ser substituído por um elemento de um conjunto especificado chamado *domínio* da variável. Quando um número particular foi substituído pela variável em uma dada expressão, o número assim obtido é chamado o *valor* da expressão para aquele número. O conjunto de todos estes valores constitui a <u>*range*</u> da expressão.
Uma sentença aberta seleciona um subconjunto de seu domínio.
Equações equivalentes: $(a = b) \wedge (c = d) \Rightarrow (a + c = b + d) \wedge (ac = bd)$

Prova do teorema: O gráfico de $ax + by + c = 0$ é uma reta. ***
Sistemas de equações de duas variáveis: soluções são da forma (x,y).
Desigualdades:

$(a > b) \wedge (b > c) \Rightarrow a > c$

$a > b \Rightarrow a + c > b + c$

$(a > b) \wedge (c > 0) \Rightarrow ac > bc$

$(a > b) \wedge (c < 0) \Rightarrow ac < bc$

$(a > b) \wedge (c > d) \Rightarrow a + c > b + d$

Gráfico de uma inequação simples: acima/abaixo da reta.
Sistemas de inequações de duas variáveis: gráfico.
Identidade: equação satisfeita para todo elemento do domínio.
Inequações absolutas – Teoremas:

- $a,b \in R^*_+;\ a \neq b \Rightarrow a^2 + b^2 > 2ab$

  Prova: $a - b \neq 0 \Rightarrow (a - b)^2 > 0$
- Sem prova: $a,b \in R^*_+;\ n \in N^*;\ a < b \Rightarrow (a^n < b^n) \wedge (a^{1/n} < b^{1/n})$

Relações e Funções

Função: $\forall a, \exists!\ b \mid aRb$
Domínio e range de uma relação: conjuntos respectivos de valores possíveis para x e y, se xRy.
Sem prova: Domínio e range contínuos ⇒ curva contínua.
Exemplo de expressão analítica explícita:

$f = \{(x,y) \mid y = ax + b\} \Leftrightarrow f(x) = y = ax + b$

y é variável dependente de x, que é independente.

Função algébrica: é definida por meio de um número finito de adições, subtrações, multiplicações, divisões, potências e raízes.
Variação direta: $y = kx$
Variação inversa: $y = k/x$
Função polinomial de grau n:

$a_0 \neq 0;\ y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$

Em matemática elementar $a_i \in R$

Teoremas sem prova:

- Tem ao menos uma raiz.
- Seu gráfico intercepta uma reta em no máximo n pontos.
- Tem exatamente n raízes não necessariamente distintas.
- $a + bi \in S \Leftrightarrow a - bi \in S$
- $n \in \{1,3,5...\} \Rightarrow n(R \cap S) = 1$

Power functions: $y = kx^n$
Função exponencial: $y = ak^{bx}$

Sem prova: A taxa de aumento de y é proporcional a x.

Relação inversa de uma função: $f = \{(x,y)\} \Leftrightarrow f^{-1} = \{(x' = y, y' = x)\}$

Medição

Ligada a conceitos matemáticos; refere-se a propriedades de coisas definidas através de regras ou a relações entre propriedades, definidas como outras propriedades (densidade, etc.).
Isomorfismo entre:

- as relações empíricas entre as propriedades;
- as propriedades dos números.

Regras matemáticas orientadas ao mundo empírico:

Nome Escala	Questão	Exemplo	Estatística Permissível

Identidade Nominal	Qual é qual	Camisa de jogador	Número de casos, moda
Ordem	Qual segue qual	Classificações de inteligência	Mediana, percentuais
Intervalo	Quanto mais/menos	Celsius e Fahrenheit	Média aritmética, desvio padrão
Razão	Quantas vezes, que parte	Comprimento, área, volume, massa	Média geométrica, média harmônica, variação percentual

Magnitude: é necessário ordenar pela numerosidade para medir.
Escala, padrões, erro; não se pode provar teoremas por medição; suposições acerca da Natureza.
Unidades valem sob condições definidas.
Erros: instrumentais, pessoais (paralaxe), teóricos, acidentais. A probabilidade da ocorrência de um erro acidental decresce tanto quanto cresce a magnitude do erro; valor médio = 0.
Aproximações, precisão (o erro não pode ser maior que 1/2 da menor unidade da escala), accuracy (erro relativo, ex. 1% do total, atravessa unidades).
V = valor exato; e = erro exato; M = valor medido; E = erro máximo
$\Rightarrow$ e = |V – M|; e $\leq$ E; precisão = E; accuracy = E/M
Ao multiplicar por um número de n algarismos significativos, usar π com n + 1 casas.

Outro olhar à Geometria

Geometria Analítica define ponto como um par/trio ordenado e local geométrico como um conjunto de pontos ou caminho que segue um ponto imaginário que percorre todos os valores possíveis das condições expressas algébrica ou analiticamente. É recente.
Suposições da geometria euclidiana para as medições:
Toda linha é graduada de tal forma que os pontos podem ser numerados e o módulo da diferença mede a distância;
Todo círculo é graduado, de tal forma que a diferença mede ângulos.
Isomórficos: Modelos concretos de estrutura abstrata idêntica.
Características de um sistema axiomático:

- Consistente – não há contradição entre as suposições e/ou os teoremas;
- Independente – nenhuma suposição é conseqüência de outra;
- Completo – não é possível acrescentar outra suposição consistente com as outras e independente delas;
- Categórico – cada um de seus modelos é isomórfico aos outros. É completo por necessidade.

Geometria hiperbólica: Dado um ponto externo, existem no mínimo duas retas paralelas a uma reta dada.
Geometria elíptica: Dado um ponto externo, não há nenhuma reta paralela a uma reta dada.

Arranjos, Seleções e Probabilidade

Produto cartesiano – possibilidades.

Para mim, chances estão sujeitas a outras Leis.